**Université Hassan II- Mohammedia**
**Faculté des Sciences et Techniques**

***Département de Mathématiques*** ***Année Universitaire :2008/2009***
***Option :MIP(Module :M311)*** ***M.Harfaoui et R.Morchadi***

**Premier contrôle**
**Durée : Une heure**

==================================================

**Exercice 0.0.1** *(7 pts)*

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$$

1. *Déterminer les points stationnaires de $f$.* *(1 pt+2 pts)*
2. *Donner la nature des points trouvés en 1.* *(1,5 pt+2,5 pts)*

==================================================

**Exercice 0.0.2**

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = y^3 + (x^2+1)y + x^4$$

1. *Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$ définit implicitement $y$ comme fonction de $x$ sur $\mathbb{R}$, qu'on notera $\varphi(x)$.* *(2 pt)*
2. *Déterminer en fonction de $x$ et $\varphi(x)$ la dérivée $\varphi'(x)$ sur $\mathbb{R}$.* *(1,5 pts)*

==================================================

**Exercice 0.0.3**

*soit $f$ la fonction définie par :*

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4}, & si \ \ (x,y) \neq (0,1) \\ f(0,1) = 0 \end{cases}$$

1. *Donner $D_f$ le domaine de définition.* *(0,5 pt)*
2. *Montrer que $f$ est continue sur $D_f$.* *(1 pts+1,5 pts)*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y)$ de $D_f$.* *(1,5 pts+1,5 pts)*
4. *Étudier la différentiabilité de $f$ sur $D_f$.* *(1,5 pts+2 pts)*

==================================================

***Bon courage***

**Université Hassan II- Mohammedia**
**Faculté des Sciences et Techniques**

***Département de Mathématiques*** ***Année Universitaire :2008/2009***
***Option :MIP(Module :M311)*** ***M.Harfaoui et R.Morchadi***

**Premier contrôle : Corrigé**
**Durée : Une heure**

==================================================

### correction 0.0.1

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$$

1. *Déterminer les points stationnaires de $f$.* *(1 pt+2 pts)*

   *La fonction $f$ est un polynôme, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
   *Les points stationnaires de $f$ sont les points $(x,y)$ tels que*
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2-4) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y(x^2+y^2-4) = 0$.
   *Ces points sont l'origine $O(0,0)$ et tous les points du cercle de centre $O$ et de rayon $2$ ($x^2+y^2=4$).*

2. *Donner la nature des points trouvés en 1.* *(1,5 pt+2,5 pts)*

   *Les dérivées partielles secondes de $f$ sont :*
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(3x^2+y^2-4)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(x^2+3y^2-4)$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8xy$.
   *La matrice héssienne est donc* $\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2+y^2-4) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+3y^2-4) \end{pmatrix}$
   *et son déterminant est* $det\mathcal{H}_f(x,y) = 16(3x^2+y^2-4).(x^2+3y^2-4) - 64x^2y^2$.

   *Natures des points stationnaires :*

   (a) *Pour le point $O$, puisque $det\mathcal{H}_f(0,0) = 16^2 > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) - 16 < 0$, $f$ admet un maximum en $O$ qui est $f(0,0) = -8$*

   (b) *Pour les points du cercle de centre $O$ et de rayon $2$ ($x^2+y^2=4$), puisque $det\mathcal{H}_f(x,y) = 0$, le théorème ne s'applique pas. On utilise donc le formule de Taylor à l'ordr $2$.*
   *En effet, pour tout point $(a,b)$ du cercle on a :*
   $$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b)) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\Big) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= Q(h,k) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$
   *Mais $a^2+b^2=4$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = 8a^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = 16ab$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 8b^2$ et donc $Q(h,k) = 8a^2h^2 + 16abhk + 8b^2k^2 = 8(ah+bk)^2 \geq 0$*

*Ce qui prouve que $f$ admet un minimum en tout point du cercle.*

==========================================================

**correction 0.0.2**

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = y^3 + (x^2+1)y + x^4$$

1. *Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ définit implicitement $y$ comme fonction de $x$ sur $\mathbb{R}$, qu'on notera $\varphi(x)$.* *(2 pt)*

   *La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2+x^2+1 \neq 0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ alors d'après le th'orème des fonctions implicites l'équation $f(x,y)=0$ définit implicitement $y$ comme fonction de $x$ sur $\mathbb{R}$.*

2. *Déterminer en fonction de $x$ et $\varphi(x)$ la dérivée $\varphi'(x)$ sur $\mathbb{R}$.* *(1,5 pts)*

   *Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ on a :* $\varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\dfrac{2x\varphi(x)+4(\varphi(x))^2+1}{3(\varphi(x))^3+x^2+1}$

==========================================================

**correction 0.0.3**

*soit $f$ la fonction définie par :*

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4}, & si \quad (x,y) \neq (0,1) \\ f(0,1) = 0 \end{cases}$$

1. *Donner $D_f$ le domaine de définition.* *(0,5 pt)*

   $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x,y) \neq (0,1)\} \bigcup \{(0,1)\} = \mathbb{R}^2$

2. *Montrer que $f$ est continue sur $D_f$.* *(1 pts+1,5 pts)*

   (a) *Pour $(x,y) \neq (0,1)$ la fonction est une fonction rationnelle de domaine de définition $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$, donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$.*

   (b) *Pour $(x,y) = (0,1)$ on a :* $\mid f(x,y) - f(0,1) \mid = \mid \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4} \mid$.

   *On sait que $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ donc*

   $\mid x^3(y-1)^2 \mid = \mid x^2(y-1)^2 \mid . \mid x \mid \leq \dfrac{1}{2}(x^4+(y-1)^4). \mid x \mid$ *et on a alors :* $\mid f(x,y) - f(0,1) \mid \leq \mid x \mid$ *et* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \mid x \mid = 0$ *d'où la continuité de $f$* $(0,1)$.

3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y)$ de $D_f$.* *(1,5 pts+1,5 pts)*

(a) *Pour* $(x, y) \neq (0, 1)$ *faire les calculs.*

(b) *Pour* $(x, y) = (0, 1)$ *on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = 0$$

*et* $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+k) - f(0,1)}{k} = 0$$

4. *Étudier la différentiabilité de* $f$ *sur* $D_f$. *(1,5 pts+2 pts)*

(a) *Pour* $(x, y) \neq (0, 1)$ $f$ *est différentiables car les fonction* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues pour tout* $(x, y) \neq (0, 1)$.

(b) *Pour* $(x, y) = (0, 1)$ *on a :*

$$\left| \frac{f(h, 1+k) - f(0,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{h^3(k-1)^2}{(h^4+(k-1)^4)(\sqrt{h^2+k^2})} \right|$$

*dont la limite, quand* $(h, k)$ *tend vers* $(0, 0)$*, n'est pas nulle. Ce qui prouve que la fonction n'est pas différentiable en* $(0, 1)$.

======================================================